ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 13: Orthogonalité et décomposition QR

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) connaître les **propriétés des matrices orthogonales** ;

(O.2) **appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale/orthonormée** à partir d'une famille génératrice ;

(O.3) **calculer la projection orthogonale** d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel, qui donne la **meilleure approximation** du vecteur avec des éléments du sous-espace ;

(O.4) **calculer la décomposition QR** d'une matrice.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- matrice orthogonale
- projection orthogonale
- meilleure approximation d'un vecteur
- distance d'un vecteur à un sous-espace
- algorithme de Gram-Schmidt
- orthonormalisation d'une base
- méthode des moindres carrées
- décomposition QR d'une matrice

Noyau d'exercices

1.1 Matrices orthogonales

Pour le noyau : items (a) et (b).

Exercice 1 (Matrices orthogonales I)

Rappel de la théorie

On rappelle qu'une matrice $U \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si $U^{\mathsf{T}}U = \mathrm{I}_n$.

Soit $U \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Montrer que

(a) U est orthogonale si et seulement si U est inversible et $U^{-1} = U^{\mathsf{T}}$;

(b) U est orthogonale si et seulement si $(U\mathbf{v})\cdot(U\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ pour tous $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$;

(c) U est orthogonale si et seulement si $\|U\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$;

(d) si U est orthogonale, alors $(U\mathbf{v}) \cdot (U\mathbf{w}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ pour tous $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

1.2 Projection orthogonale

Exercice 2 (Calcul de la projection orthogonale)

Rappel de la théorie

Soit $(\ |\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur un espace vectoriel V et soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension finie. On rappelle que, pour tout $v \in V$, la **projection orthogonale** $\mathrm{proj}_W(v) \in W$ peut se calculer à partir d'une **base orthogonale** $\mathscr{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ de W via

$$\mathrm{proj}_W(v) = \frac{(v|w_1)}{(w_1|w_1)} w_1 + \ldots + \frac{(v|w_m)}{(w_m|w_m)} w_m.$$

L'expression précédente est indépendante de la base orthogonale $\mathscr{B}$ de W.

(a) Soient

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dans $\mathbb{R}^3$.

(i) Vérifier que $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont orthogonaux.

(ii) Calculer la projection orthogonale $\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$ de $\mathbf{v}$ sur $W = \mathrm{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

(iii) Donner la décomposition $\mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$, où $\mathbf{z} \in W^\perp$.

(b) Même question pour

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dans $\mathbb{R}^4$.

(c) Même question pour

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Algorithme de Gram-Schmidt

Exercice 3 (Calcul de base orthonormée dans $\mathbb{R}^n$)
Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ suivantes.

(a) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, avec

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, avec

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Donner une base orthonormée pour les items précédents.

Exercice 4 (Calcul de base orthonormée dans $\mathbb{P}$)
On considère le produit scalaire $(\ |\ ) : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ sur $\mathbb{P}$ donné par

$$(p|q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$$

pour tous $p, q \in \mathbb{P}$. Soit $W = \text{Vect}\{1, t, t^2\}$. Calculer une base orthonormée de W.

1.4 Meilleure approximation

Exercice 5 (Meilleure approximation)
Soient les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w}_2' = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver la meilleure approximation de $\mathbf{v}$ par un vecteur dans $\text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.
(b) Calculer la distance entre $\mathbf{v}$ et $\text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.
(c) Trouver la meilleure approximation de $\mathbf{v}'$ par un vecteur de la forme $\text{Vect}\{\mathbf{w}_1', \mathbf{w}_2'\}$.
(d) Calculer la distance entre $\mathbf{v}'$ et $\text{Vect}\{\mathbf{w}_1', \mathbf{w}_2'\}$.

1.5 Décomposition QR

Exercice 6 (Décomposition QR)
Calculer la décomposition QR des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le noyau : items (a), (i) et (ii) ; et (b), (i).

Exercice 7 (Moindres carrées et décomposition QR)
Déterminer la solution $\hat{\mathbf{x}}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ au sens des moindres carrés

(a) en utilisant l'équation normale lorsque

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

(b) en utilisant la méthode QR lorsque

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour compléter la pratique

2.1 Matrices orthogonales

Exercice 8 (Matrices orthogonales II)
Montrer que

(a) $U \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si U^{T} est orthogonale ;

(b) si $U, V \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ sont orthogonales, alors UV est orthogonale ;

(c) si

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

est unitaire (*i.e.* $\|\mathbf{v}\| = 1$), alors la matrice

$$R_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1-2v_1v_1 & -2v_1v_2 & \dots & -2v_1v_n \\ -2v_2v_1 & 1-2v_2v_2 & \dots & -2v_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2v_nv_1 & -2v_nv_2 & \dots & 1-2v_nv_n \end{pmatrix}$$

est orthogonale ;

(d) si λ est une valeur propre réelle d'une matrice orthogonale U, alors $\lambda \in \{-1, 1\}$;

(e) étant donné une partie $\mathscr{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, la matrice $[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n] \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $\mathscr{F}$ est une famille orthonormée.

2.2 Projection orthogonale

Exercice difficile !

Exercice 9 (Projection orthogonale I)

Rappel de la théorie

Soit $(\mid) : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur un espace vectoriel V et soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension finie. On rappelle que, pour tout $v \in V$, il existe un **unique** élément $\mathrm{proj}_W(v) \in W$ tel que $v - \mathrm{proj}_W(v) \in W^\perp$ (voir Thm. 12.32). On appelle $\mathrm{proj}_W(v) \in W$ la **projection orthogonale** de v sur W, ou aussi la **meilleure approximation** de v par un élément de W.
La **distance** de v à W, définie par

$$d(v, W) = \inf\{\|v - w\| : w \in W\}.$$

Un **résultat important** (voir Thm. 12.32) nous dit que

$$d(v, W) = \|v - \mathrm{proj}_W(v)\|.$$

On continue avec les hypothèse précédentes. Montrer que l'application $\mathrm{proj}_W : V \to W$ qui associe $\mathrm{proj}_W(v)$ à $v \in V$ est linéaire. En déduire que

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V).$$

2.3 Algorithme de Gram-Schmidt

Exercice 10 (V/F sur orthogonalité)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
(a) Tout famille non-vide orthonormée de $\mathbb{R}^n$ est liée.	☐	☐
(b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{v}$ est dans W et dans $W^\perp$, alors $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.	☐	☐
(c) Si U est une matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes forment une famille orthonormée, alors $U^\mathrm{T} U\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.	☐	☐
(d) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension p avec $0 < p \leq n$, alors la méthode de Gram-Schmidt produit une base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ avec $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ à partir d'une famille quelconque $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ de W, .	☐	☐

2.4 Meilleure approximation

Exercice 11 (V/F sur la meilleure approximation)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
(a) Une base d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux deux à deux est appelée une base orthonormée.	☐	☐
(b) Un ensemble $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre.	☐	☐
(c) Une base orthonormée est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général.	☐	☐
(d) Si $\mathbf{v}$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel W, alors $\mathbf{v} - \mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$ n'est pas nul.	☐	☐

2.5 Projection orthogonale et décomposition QR

Exercice 12 (V/F sur projection orthogonale et décomposition QR)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
(a) Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^T A = R$.	☐	☐
(b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit $\hat{\mathbf{y}}$ la projection orthogonale de $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W. Alors $\hat{\mathbf{y}}$ dépend du choix de la base de W.	☐	☐
(c) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ tel que $W = \mathrm{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Si $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}_2$, alors $\mathbf{z} \in W^\perp$.	☐	☐
(d) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{y} \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $\mathrm{proj}_W(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$.	☐	☐